Université Mustapha Stambouli-Mascara **A.U :2022/2023**
Faculté des Sciences Exactes 2^e **Chimie**
Département de Chimie **Mathématiques appliqués**

Corrigé type d'examen semestriel

Exercice :01 (6 Pts)

On a

$$\iint_{\mathbb{D}} x^2 e^{xy} dxdy = \int_0^1 \left[\int_1^2 x^2 e^{xy} dx\right] dy (\text{1 pts})$$

Utilisons le théorème de Fubini(0.5 pts)

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{D}} x^2 e^{xy} dxdy &= \int_1^2 x^2 \left[\int_0^1 e^{xy} dy\right] dx (\text{1 pts}) \\
&= \int_1^2 x^2 \left[\frac{1}{x} e^{xy}\right]_{y=0}^{y=1} dx (\text{0.5 pts}) \\
&= \int_1^2 x^2 \left[\frac{1}{x} e^{x} - \frac{1}{x} e^{0}\right] dx (\text{1 pts}) \\
&= \int_1^2 \left(xe^x - x\right) dx. (\text{0.5 pts}) \\
&= \int_1^2 xe^x dx - \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 . (\text{0.5 pts}) \qquad (1)
\end{aligned}$$

Maintenant, on utilise une intégration par partie . En effet, on pose $U(x) = x$, $U'(x) = 1$ et $V'(x) = e^x$, $V(x) = e^x$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_1^2 xe^x dx &= [xe^x]_1^2 - \int_1^2 e^x dx \\
&= 2e^2 - e - \left(e^2 - e\right) \\
&= e^2 (\text{0.5 pts}).
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\iint_{\mathbb{D}} x^2 e^{xy} dxdy = e^2 - \left[2 - \frac{1}{2}\right] = e^2 - \frac{3}{2} (\text{0.5 pts})$$

Exercice :02(4 Pts)

1. Le rayon R de convergence de la série

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln(n!)} x^n.$$

On a

$$R=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| (\text{0.5 pts})$$

avec $u_n=\frac{1}{\ln(n!)}$.

Ainsi

$$\begin{aligned}
R &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{1}{\ln(n!)}}{\frac{1}{\ln[(n+1)!]}}\right| (\text{0.5 pts})\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln[(n+1)!]}{\ln(n!)} (\text{0.5 pts})\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln[(n+1)n!]}{\ln(n!)} (\text{0.5 pts})\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+1)+\ln(n!)}{\ln(n!)}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left[\underbrace{\frac{\ln(n+1)}{\ln(n!)}}_{\to 0}+1\right] (\text{0.5 pts})\\
&= 1.
\end{aligned} \tag{2}$$

Ainsi $R=1$(0.5 pts)

2. Le domaine de convergence de la série est par définition

$$I=]x_0-R,x_0+R[\,(\text{0.5 pts}),\ x_0=0,\ R=1$$

et par suite

$$I=]-1,+1[\,(\text{0.5 pts}).$$

<u>Exercice :03 (6 Pts)</u>

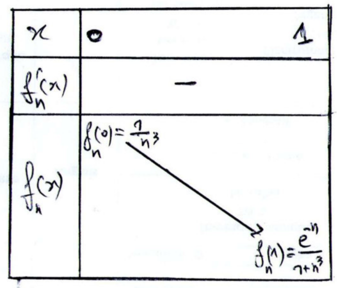
Pour démontrer que la série $\sum_{n\geq 2}\frac{e^{-nx}}{x^2+n^3}$ est normalement convergente sur pour $[0,1]$, il suffit de trouver une série numérique $\sum_{n\geq 2} a_n$ convergente(0.5 pts) telle que

$$\forall x\in[0,1]\,;\ \left|\frac{e^{-nx}}{x^2+n^3}\right|\leq a_n(\text{0.5 pts}).$$

On pose $f_n(x)=\frac{e^{-nx}}{x^2+n^3}$ (0.5 pts), donc

$$\begin{aligned}
f_n'(x) &= \frac{-ne^{-nx}(x^2+n^3)-2xe^{-nx}}{(x^2+n^3)^2} (\text{0.5 pts})\\
&= \frac{-e^{-nx}}{(x^2+n^3)^2}\left[n(x^2+n^3)+2x\right] (\text{0.5 pts})\\
&= \frac{-e^{-nx}}{(x^2+n^3)^2}\left[nx^2+2x+n^4\right] (\text{0.5 pts})\leq 0,\ \forall x\in[0,1]\,(\text{0.5 pts}).
\end{aligned} \tag{3}$$

Ainsi, on remarque que $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) \leq f_n(0) = \frac{1}{n^3}$ (0.5 pts).



(0.5 pts)

FIGURE 1 – Le tableau des variations

Or, la série numérique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann (0.5 pts)convergente $(\alpha = 3)$(0.5 pts), et par conséquent la série de fonctions $\sum_{n \geq 2} \frac{e^{-nx}}{x^2+n^3}$ est normalement convergente(0.5 pts).

<u>Exercice :04 (4 Pts)</u>

1. Pour démontrer la convergence de la série numérique

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{(n+2)3^n}.$$

on utilise la règle de d'Alembert(0.5 pts). On a

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} (0.5 \text{ pts}) &= \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{\frac{(n+2)}{(n+3)3^{n+1}}}{\frac{n+1}{(n+2)3^n}} \right] (0.5 \text{ pts}) \\
&= \lim_{n \to +\infty} \frac{3^n (n+2)^2}{(n+3)3^{n+1}(n+1)} \\
&= \frac{1}{3} \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+2)^2}{(n+1)(n+3)} (0.5 \text{ pts}) \\
&= \frac{1}{3}. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Et comme la limite $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1$(0.5 pts), il vient d'après la règle de d'Alembert que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n^3}{n!}$ est une série convergente(0.5 pts).

2. En ce qui concerne l'encadrement, on a

$$\begin{aligned} 0 \le \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{(n+2)3^n} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+2)-1}{(n+2)3^n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)3^n} \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)3^n} \\ &\le \frac{3}{2}. \end{aligned} \tag{5}$$

car la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)3^n}$ est positive.

Ainsi

$$(\text{0.5 pts}) 0 \le \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{(n+2)3^n} \le \frac{3}{2}. (\text{0.5 pts})$$

On peut trouver mieux, par exemple on peut démontrer que la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{(n+2)3^n}$ vérifie

$$\frac{3}{4} \le \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{(n+2)3^n} \le \frac{3}{2}.$$

Université Mustapha Stambouli-Mascara **A.U :2022/2023**

Faculté des Sciences Exactes 2^e **Chimie**

Département de Chimie **Mathématiques appliqués**

Examen Semestriel(Durée :1h30')

Exercice :01(6 Pts)

Soit

$$\mathbb{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 \leq x \leq 2 \,\text{et}\, 0 \leq y \leq 1\right\}.$$

Calculer l'intégrale

$$\iint_{\mathbb{D}} x^2 e^{xy} dx dy.$$

Indication : Utiliser le théorème de Fubini.

Exercice :02 (4 Pts)

1. Calculer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\ln(n!)} x^n.$$

2. Déduire le domaine de convergence de cette série.

Exercice :03 (6 Pts)

On considère la série de fonctions suivante

$$\sum_{n \geq 2} \frac{e^{-nx}}{x^2 + n^3}; \quad x \in [0, 1].$$

Montrer que cette série est normalement convergente.

Exercice :04 (4 Pts)

Considérons la suite numérique suivante

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{(n+2)3^n}.$$

1. Prouver que cette série est convergente.
2. Déduire un encadrement de la somme de cette série (c-à-d) trouver deux constantes a et b telles que

$$a \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{(n+2)3^n} \leq b$$