Université Mustapha Stambouli de Mascara **11/01/2023**
Faculté des Sciences Exactes
Département: Tronc commun SM
Première année SM

Examen du premier semestre: Math 1
Durée: 01h30m

Exercice 1: Soient $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ et $f\ :\ [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[\alpha, \beta]$ et dérivable sur $]\alpha, \beta[$. On considère la fonction g définie par

$$g(x) = f(x) - \left(\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}\right)(x - \alpha).$$

- Donner l'énoncé du théorème de Rolle.
- Appliquer le théorème pour la fonction g sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$.
- En déduire que : $\exists c \in]\alpha, \beta[\ :\ \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = f'(c)$.

Exercice 2: Soient $a,\ b \in \mathbb{R}$ et considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & x \in]-\infty, 1[\\ \sqrt{x} & x \in [1, +\infty[\,. \end{cases}$$

- Trouver une relation entre a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.
- On pose: $b = -a$. Déterminer la valeur de a pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3: Soit f l'application définie par: $f(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On définit dans $\mathbb{R}$ la relation $\mathcal{R}$ par:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\ :\ x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow f(x) = f(y).$$

- Montrer que: $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
- Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer la classe d'équivalence de a.
- Déterminer l'ensemble quotient: $\mathbb{R}/\mathcal{R}$.

Notons que f n'est pas injective. On considère l'application $\tilde{f}$, définie par:

$$\begin{aligned} \tilde{f}\ :\ \mathbb{R}/\mathcal{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \dot{x} &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

où $\dot{x}$ représente la classe d'équivalence de x.

- Montrer que $\tilde{f}$ est injective.

Corrigé type de l'examen du premier semestre: Math 1

Exercice 1:

- **Théorème de ROLLE:** Soit: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que: f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $f(a) = f(b)$. Alors: $\exists c \in]a,b[: \ f'(c) = 0$.
- On a
  - g est continue sur $[\alpha,\beta]$ car g est la somme de 2 fonctions, l'une (f) continue sur $[\alpha,\beta]$ (par hypothèse) et l'autre ($\left(\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\right)(x-\alpha)$) continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynomiale).
  - g est dérivable sur $]\alpha,\beta[$ car g est la somme de 2 fonctions, l'une (f) dérivable sur $]\alpha,\beta[$ (par hypothèse) et l'autre ($\left(\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\right)(x-\alpha)$) dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynomiale).
  - $g(\alpha) = g(\beta) = f(\alpha)$.

  Donc, d'après le théorème de ROLLE: $\exists c \in]a,b[: \ g'(c) = 0$
- En remplaçant g' par sa formule, on obtient que: $\exists c \in]\alpha,\beta[: \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = f'(c)$.

Exercice 2:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & x \in]-\infty, 1[\\ \sqrt{x} & x \in [1, +\infty[. \end{cases}$$

- **Relation entre a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$:**
  - f est continue sur $]-\infty,1[$, car sur $]-\infty,1[$, $f(x) = ax^2 + bx + 1$ qui est continue sur $\mathbb{R}$, étant une fonction polynomiale.
  - f est continue sur $]1,+\infty[$, car sur $]1,+\infty[$, $f(x) = \sqrt{x}$ qui est continue sur $[0,+\infty[$.
  - au point 1 on a:
    $f(1) = \sqrt{1} = 1$, $\quad \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (ax^2 + bx + 1) = a + b + 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \sqrt{x} = 1$.

  Donc, pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$, il faut que: $a + b + 1 = 1 \Rightarrow a + b = 0$.
- **On pose $b = -a$:**
  - f est dérivable sur $]-\infty,1[$, car sur $]-\infty,1[$, $f(x) = ax^2 - ax + 1$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$.
  - f est dérivable sur $]1,+\infty[$, car sur $]1,+\infty[$, $f(x) = \sqrt{x}$ qui est dérivable sur $]0,+\infty[$.
  - au point 1 on a:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{ax^2 - ax}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{ax(x-1)}{x-1} = a$$

  et

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \frac{1}{2}.$$

Donc, pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$, il faut que: $a = \frac{1}{2}$.

Exercice 3: La relation $\mathcal{R}$ est definit par:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow f(x) = f(y) \Longleftrightarrow x^2 = y^2.$$

- $\mathcal{R}$ **est une relation d'équivalence?**

  1) $\mathcal{R}$ **est reflexive?** Il faut montrer que:

  $$\forall x \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}x.$$

  Soit $x \in \mathbb{R}$. On a: $x^2 = x^2 \Rightarrow f(x) = f(x) \Rightarrow x\mathcal{R}x$. Donc $\mathcal{R}$ est reflexive.

  2) $\mathcal{R}$ **est symetrique?** Il faut montrer que:

  $$\forall x, y \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x.$$

  Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a: $x\mathcal{R}y \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow f(y) = f(x) \Rightarrow y\mathcal{R}x$. Donc $\mathcal{R}$ est symetrique.

  3) $\mathcal{R}$ **est transitive?** Il faut montrer que:

  $$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : \big(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z\big) \Rightarrow x\mathcal{R}z.$$

  Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. On a:

  $$\begin{aligned}\big(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z\big) &\Rightarrow \big(f(x) = f(y) \text{ et } f(y) = f(z)\big)\\ &\Rightarrow f(x) = f(z)\\ &\Rightarrow x\mathcal{R}z.\end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{R}$ est transitive et par suite $\mathcal{R}$ est une relation d'equivalence.

- **La classe d'equivalence de** $a \in \mathbb{R}$**:** On a:

  $$\dot{a} = \{x \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}a\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = a^2\} = \{x \in \mathbb{R} : (x-a)(x+a) = 0\} = \{a, -a\}.$$

- **L'ensemble quotient** $\mathbb{R}/\mathcal{R}$**:** On a:

  $$\mathbb{R}/\mathcal{R} = \{\dot{x}, x \in \mathbb{R}\} = \{\{x, -x\}, x \in \mathbb{R}\}.$$

- $\tilde{f}$ **injective?** On doit montrer que:

  $$\forall \dot{x}_1, \dot{x}_2 \in \mathbb{R}/\mathcal{R} : \tilde{f}(\dot{x}_1) = \tilde{f}(\dot{x}_2) \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{x}_2$$

  Soient $\dot{x}_1, \dot{x}_2 \in \mathbb{R}/\mathcal{R}$. On a:

  $$\begin{aligned}\tilde{f}(\dot{x}_1) = \tilde{f}(\dot{x}_2) &\Rightarrow x_1^2 = x_2^2\\ &\Rightarrow x_1\mathcal{R}x_2\\ &\Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{x}_2.\end{aligned}$$

  Donc $\tilde{f}$ est injective.

Barème

Exercice 1: 07 points

- **Question 1:** 04 points (01+01+01+01)
- **Question 2:** 02.50 points (0.5+0.5+0.5+0.5+0.5)
- **Question 3:** 0.5 points

Exercice 2: 06.50 points

- **Question 1:** 03 points (0.5+0.5+0.5+0.5+0.5+0.5)
- **Question 2:** 03.50 points (0.5+0.5+0.5+0.5+0.5+0.5+0.5)

Exercice 3: 07 points

- **Question 1:** 03.75 points
  - $\mathcal{R}$ reflexive: 0.25+0.25+0.75
  - $\mathcal{R}$ symetrique: 0.25+0.25+0.75
  - $\mathcal{R}$ transitive: 0.25+0.25+0.75
- **Question 2:** 01.25 points (0.5+0.25+0.25+0.25)
- **Question 3:** 0.75 points (0.5+0.25)
- **Question 4:** 01.25 points (0.5+0.25+0.25+0.25)