****

**Université Mustapha Stambouli Mascara Faculté des Sciences Exactes**

**Département de physique 2ème Année LMD-Physique**

***Correction Examen de* *Mécanique Analytique***

**Exercice1 : 12pts**

1. Montre que la masse **m** admet un degré de liberté.

$\left\{\begin{array}{c}x\_{m}=x.cosα\\y\_{m}=x.sinα\end{array}\right.$ → $\left\{\begin{array}{c}\dot{x}\_{m}=\dot{x}cosα\\\dot{y}\_{m}=\dot{x}sinα\end{array}\right.$

Nombre de degré de liberté = nbre de configuration – nbre de liaison

Nbre D.L = 3 – 2 = 1

1. Etablir les expressions de l’énergie cinétique T et de l’énergie potentielle U de la masse **m** et de poulet **M**

$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^{2}+\dot{y}^{2}\right)+\frac{1}{2}I\left(\dot{θ}\right)^{2}$

 $T=\frac{1}{2}m\dot{x}^{2}+\frac{1}{2}\left(MR^{2}/2\right)\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^{2}=\frac{1}{2}(m+\frac{1}{2}M)\dot{x}^{2}$

 $U=-mgxsinα+\frac{1}{2}kx^{2}$

1. Lagrangien L est les équations du mouvement

$L=T-U=\frac{1}{2}\left(m+\frac{1}{2}M\right)\dot{x}^{2}+mgxsinα-\frac{1}{2}kx^{2}$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{∂L}{∂\dot{x}}\right)=\frac{∂L}{∂x}$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{∂L}{∂\dot{x}}\right)=\frac{d}{dt}\left(\left(m+\frac{1}{2}M\right)\dot{x}\right)=\left(m+\frac{1}{2}M\right)\ddot{x}$

$\frac{∂L}{∂x}= mgsinα-kx$

 $\left(m+\frac{1}{2}M\right)\ddot{x}= mgsinα-kx$

1. Hamiltonien H et l´équation du mouvement.

$P\_{x}=\frac{∂L}{∂\dot{x}}=\left(m+\frac{1}{2}M\right)\dot{x} ⟹ \dot{x}=\frac{P\_{x}}{\left(m+\frac{1}{2}M\right)}$

$H=P\_{x}\dot{x}-L= \frac{P\_{x}^{2}}{\left(m+\frac{1}{2}M\right)}-\frac{1}{2}\left(\frac{P\_{x}}{\left(m+\frac{1}{2}M\right)}\right)^{2}-mgxsinα+\frac{1}{2}kx^{2}$

$H=P\_{x}\dot{x}-L= \frac{P\_{x}^{2}}{2\left(m+\frac{1}{2}M\right)}-mgxsinα+\frac{1}{2}kx^{2}$

$\dot{x}=\frac{∂H}{∂P\_{x}}=\frac{P\_{x}}{\left(m+\frac{1}{2}M\right)}$

$\dot{P\_{x}}=-\frac{∂H}{∂x}=mgsinθ-kx$

$\ddot{x}=\frac{\dot{P\_{x}}}{\left(m+\frac{1}{2}M\right)} ⟹ \dot{P\_{x}}=\left(m+\frac{1}{2}M\right)\ddot{x}$

$\left(m+\frac{1}{2}M\right)\ddot{x}=mgsinθ-kx$

**Exercice2 : 08pts**

Passage aux coordonnées cartésiennes en deux dimensions, x et y aux coordonnées polaires, r et ϕ.

Ici qi = (x,y) et Qi = (r,ϕ) avec i = 1,2. De plus, pi = (px, py) et Pi = (Pr,Pϕ).Nous savons que

$\left\{\begin{array}{c}q\_{1}=x=rcosφ\\q\_{2}=y=rsinφ\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}Q\_{1}=r\\Q\_{2}=φ\end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{c}p\_{1}=p\_{x}\\p\_{2}=p\_{y}\end{array}\right.$

Donc :

 $r=\left(x^{2}+y^{2}\right)^{\frac{1}{2}} ⟺ Q\_{1}=\left(q\_{1}^{2}+q\_{2}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$φ=tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) ⟺ Q\_{2}=tan^{-1}\left(\frac{q\_{2}}{q\_{1}}\right)$

Nous écrivons la fonction F2(qi,Pi)

$F\_{2}\left(q\_{i},P\_{i}\right)=\sum\_{i}^{n}Q\_{i}\left(q\_{j},t\right)P\_{i}=F\_{2}\left(x,y,P\_{r},P\_{φ}\right)$

Alors

$F\_{2}\left(q\_{i},P\_{i}\right)=\left(q\_{1}^{2}+q\_{2}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}.P\_{r}+tan^{-1}\left(\frac{q\_{2}}{q\_{1}}\right).P\_{φ}=\left(x^{2}+y^{2}\right)^{\frac{1}{2}}.P\_{r}+tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right).P\_{φ}$

 Les lois canoniques d’une transformation F2 sont

$p\_{x}=\frac{∂F\_{2}}{∂x}=\frac{x}{\left(x^{2}+y^{2}\right)^{\frac{1}{2}}}.P\_{r}-\frac{y}{x^{2}+y^{2}}.P\_{φ}$

$p\_{x}=cosφ.P\_{r}-\frac{sinφ}{r}.P\_{φ}$

$p\_{y}=\frac{∂F\_{2}}{∂y}=\frac{y}{\left(x^{2}+y^{2}\right)^{\frac{1}{2}}}.P\_{r}+\frac{x}{x^{2}+y^{2}}.P\_{φ} $

$p\_{y}=sinφ.P\_{r}+\frac{cosφ}{r}.P\_{φ}$

d’où on obtient facilement

$P\_{r}=\frac{xp\_{x}+yp\_{y}}{\left(x^{2}+y^{2}\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{r.p}{\left|r\right|}$

$P\_{φ}=xp\_{y}-yp\_{x}=\left(r.p\right)\_{z}=I\_{z}$